NMSA334: cvičení 10 – proces množení a zániku, systémy hromadné obsluhy

Obecný proces množení a zániku je Markovův řetězec se spojitým časem, množinou stavů $S = \mathbb{N}_0$ a maticí intenzit tvaru

$$\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \mu_1 & -(\lambda_1+\mu_1) & \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \mu_2 & -(\lambda_2+\mu_2) & \lambda_2 & 0 & \ddots \\ 0 & 0 & \mu_3 & -(\lambda_3+\mu_3) & \lambda_3 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix},$$

kde $\lambda_j > 0$ pro $j \in \mathbb{N}_0$ a $\mu_k > 0$ pro $k \in \mathbb{N}$. Vnořený řetězec je nerozložitelný a má všechny stavy trvalé právě tehdy, když $\sum_{k=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{k} \frac{\mu_i}{\lambda_i} = \infty$. Za této podmínky pak podle věty 9.2 existuje invariantní míra a je tvaru

$$\eta_k = \eta_0 \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Jestliže $\sum_{k=1}^{\infty} \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}} < \infty$, potom lze invariantní míru znormovat na pravděpodobnostní rozdělení, a tudíž existuje stacionární rozdělení, které je zároveň limitním rozdělením.

Do tohoto modelu spadá *systém hromadné obsluhy* $M/M/c$ s maticí intenzit

$$\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 2\mu & -(\lambda+2\mu) & \lambda & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & c\mu & -(\lambda+c\mu) & \lambda & 0 & \cdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & c\mu & -(\lambda+c\mu) & \lambda & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Konstanta c udává počet stanic obsluhy. Pokud je v systému více zákazníků než c, je obsluhováno jen c z nich a zbývající čekají v jedné frontě, která může být libovolně dlouhá. Lze připustit i $c = \infty$ (systém $M/M/\infty$), pak se žádná fronta netvoří.

Uvažujeme-li systém hromadné obsluhy s omezenou délkou fronty, pak je množina stavů konečná. Tento model je speciálním příkladem obecného procesu množení a zániku s omezením na velikost populace, pro který máme konečnou množinu stavů $S = \{0, \dots, n\}$ a maticí intenzit tvaru

$$\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \mu_1 & -(\lambda_1+\mu_1) & \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_2 & -(\lambda_2+\mu_2) & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & \mu_{n-1} & -(\lambda_{n-1}+\mu_{n-1}) & \lambda_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \mu_n & -\mu_n \end{pmatrix},$$

kde $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}, \mu_1, \dots, \mu_n > 0$. Stacionární rozdělení existuje a splňuje

$$\pi_k = \pi_0 \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Příklad 10.1: Předpokládejme, že příchody tiskových úloh odesílaných na tiskárnu tvoří Poissonův proces s intenzitou λ. Úlohy se řadí do tiskové fronty a jsou zpracovávány jedna po druhé podle pořadí příchodu. Doby zpracování mají exponenciální rozdělení s intenzitou μ, jsou vzájemně nezávislé a nezávislé na procesu příchodů úloh. Nechť X_t značí počet úloh v systému (čekajících i zpracovávaných dohromady) v čase t. Určete matici intenzit Markovova řetězce $\{X_t, t \geq 0\}$. Zjistěte, kdy existuje stacionární rozdělení a určete ho. Spočtěte střední počet úloh čekajících ve frontě v ustáleném provozu.

Příklad 10.2: Uvažujme stanici obsluhy, která může obsluhovat současně nejvýše dva zákazníky (např. dvojitá telefonní budka). Pravděpodobnost příchodu zákazníka v intervalu $(t, t+h]$ je $\lambda h + o(h)$. Pravděpodobnost, že zákazník, který je v čase t ještě obsluhován, bude v intervalu $(t, t+h]$ obsloužen, je $\mu h + o(h)$. Zákazníci, kteří nemohou být ihned obslouženi, se řadí do jediné fronty (může být neomezeně dlouhá). Nechť X_t značí počet zákazníků v systému (obsluhovaných i ve frontě dohromady) v čase t. Napište matici intenzit Markovova řetězce $\{X_t, t \geq 0\}$. Zjistěte, kdy existuje stacionární rozdělení a určete ho. Spočtěte střední počet zákazníků v systému v ustáleném provozu. Spočtěte střední počet zákazníků ve frontě v ustáleném provozu.

Příklad 10.3: Označme X_t počet přístupů na určitou webovou stránku v čase t. K připojení nového uživatele na stránku dojde v průměru každou minutu. Průměrná doba prohlížení stránky jedním uživatelem jsou 3 minuty. Předpokládejme, že doby mezi jednotlivými přístupy i doby prohlížení stránky jsou nezávislé náhodné veličiny s exponenciálním rozdělením. Najděte matici intenzit Markovova řetězce $\{X_t, t \geq 0\}$. Rozhodněte, zda existuje stacionární rozdělení řetězce $\{X_t, t \geq 0\}$. Pokud ano, tak ho určete.

Příklad 10.4: Kapacita podzemního parkoviště obchodního domu je 100 vozů. Na parkoviště přijíždí vůz v průměru každých 5 minut; je-li obsazeno, vůz nečeká a odjíždí. Průměrná doba, kterou vůz parkuje, je jedna hodina. Najděte limitní rozdělení počtu vozů na parkovišti, předpokládáme-li, že doby mezi příjezdy na parkoviště i doby parkování jsou nezávislé náhodné veličiny s exponenciálním rozdělením. Spočtěte střední počet aut na parkovišti v ustáleném provozu.

Příklad 10.5: V holičství pracují 3 holiči. Každý z nich obsluhuje jednoho zákazníka průměrně 10 minut. Do holičství přichází v průměru 12 zákazníků za hodinu. V případě, že žádný z holičů není volný, zákazníci čekají v jediné frontě, přičemž zákazník, který by se musel do fronty zařadit jako čtvrtý, odchází neobsloužen. Předpokládáme, že doby mezi příchody zákazníků i doby obsluhy jsou nezávislé náhodné veličiny s exponenciálním rozdělením. Určete limitní rozdělení počtu zákazníků v holičství (ve frontě i v obsluze), střední počet zákazníků ve frontě a pravděpodobnost, že zákazník odejde neobsloužen.